OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXI OPM - 2ª Eliminatória - 09.01.2013 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Sugestões para a resolução dos problemas

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

1. (a) Opção D.
   (b) Opção C.
   (c) Opção B.
   (d) Opção E.

2. **Solução 1**: Note-se que o número de caixotes restantes é maior do que 4, por restarem 4 livros por distribuir, pelo que o número de caixotes reciclados é no máximo 5. A tabela seguinte indica a quantidade possível de caixotes reciclados, livros a redistribuir, caixotes restantes e livros que sobrariam.

Caixotes reciclados	Livros a redistribuir	Caixotes Restantes	Livros que sobram
1	$1 \times 20 = 20$	9	2
2	$2 \times 20 = 40$	8	0
3	$3 \times 20 = 60$	7	4
4	$4 \times 20 = 80$	6	2
5	$5 \times 20 = 100$	5	0

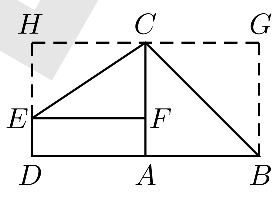
Observa-se que o único caso em que sobram 4 livros ocorre quando são reciclados 3 caixotes.

Solução 2: O José tem $20 \times 10 = 200$ livros. Destes, $200 - 4 = 196$ ficaram distribuídos igualmente pelo número de caixotes restantes, pelo que esse número é um divisor de 196. Por outro lado, como o João tinha inicialmente 10 caixotes, o número de caixotes restantes é menor do que 10 e como restaram 4 livros que não se conseguiram dividir pelos caixotes restantes, terá de ser maior que 4.

Dividindo 196 pelos números de 5 a 9 verifica-se que o único que deixa resto zero é o 7, pelo que restaram 7 caixotes. Portanto, o José decidiu reciclar $10 - 7 = 3$ caixotes.

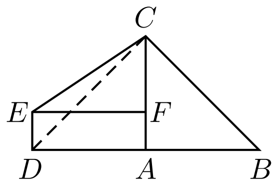
3. Através das duas primeiras figuras, conclui-se que o lados maiores do retângulo, o cateto maior do triângulo pequeno e ambos os catetos do triângulo grande têm o mesmo comprimento.

Solução 1: Observe-se agora a terceira figura formada pela Helena. Completando a figura com triângulos congruentes às duas peças triangulares, obtém-se a seguinte figura:



O triângulo $[ABC]$ é retângulo e isósceles, logo os triângulos $[ABC]$ e $[BCG]$ formam um quadrado de área 6 cm^2. Como $[AD]$ e $[AC]$ têm o mesmo comprimento, $[ADHC]$ é também um quadrado de área 6 cm^2. Uma vez que o retângulo $[ADEF]$ e os triângulos $[EFC]$ e $[EHC]$ têm a mesma área, conclui-se que cada uma das peças mais pequenas tem $\frac{6}{3} = 2$ cm^2 de área.

Solução 2: Na figura seguinte, $[ACD]$ e $[ABC]$ são congruentes, logo têm ambos área 3 cm^2.

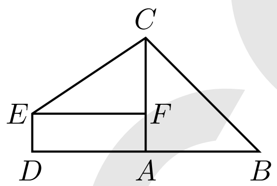


O triângulo $[CED]$ tem a mesma base e a mesma altura do retângulo $[ADEF]$, portanto tem metade da sua área. Assim,

$$\text{Área}_{[ACD]} = \text{Área}_{[ADEF]} + \text{Área}_{[CEF]} - \text{Área}_{[CED]} = (1+1-1/2)\text{Área}_{[ADEF]} = \frac{3}{2}\text{Área}_{[ADEF]}$$

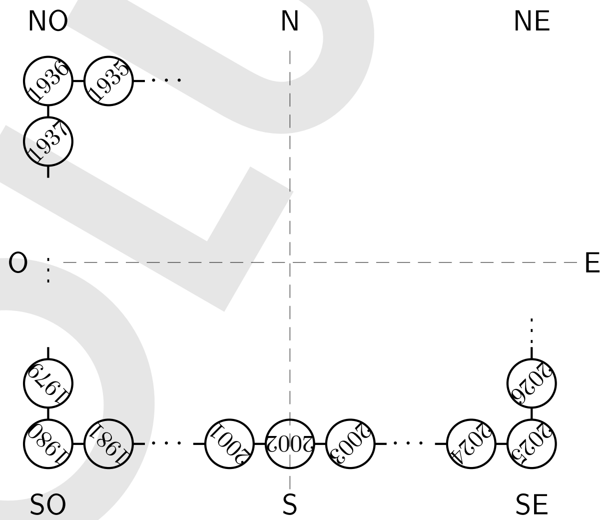
Logo $\text{Área}_{[ADEF]} = \dfrac{2}{3}\text{Área}_{[ACD]} = 2$ cm^2.

Solução 3: Como o retângulo $[ADEF]$ e o triângulo $[CEF]$ têm a mesma área e a mesma base $[EF]$, então $[CEF]$ tem o dobro da altura de $[ADEF]$, ou seja $\overline{CF} = 2\overline{AF}$.



Assim, o triângulo $[CEF]$ tem a mesma base do triângulo $[ABC]$ e $2/3$ da sua altura, logo tem $2/3$ da sua área, ou seja, $2/3 \times 3 = 2$ cm^2.

4. Observe-se que os quadrados dos números ímpares estão na direção sudeste e os quadrados dos números pares estão na direção noroeste. Na figura seguinte está representada a disposição dos candeeiros cujos números estão entre $44^2 = 1936$ e $45^2 = 2025$.



Observe-se ainda que o número $44^2+44 = 1980$ está na direção sudoeste e o número $44^2+44+44/2 = 2002$ está na direção sul. Assim, o número 2013 está na direção sudeste.