XXX OPM - 2ª Eliminatória - 11.01.2012 - Categoria A - 8°/9° anos

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Podemos escrever os números de 0 a 99 num tabuleiro 10×10 da seguinte forma

0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99

A resposta pretendida é portanto a soma das quadrículas azuis mais 100, porque a casa número 100 também é pintada de azul.

Resolução 1:

A soma de todos estes números é igual a

$$\begin{aligned}
&(1+3+5+7+9)+(10+12+14+16+18)+\cdots+(90+92+94+96+98)+100=\\
=&\underbrace{(1+3+5+7+9)}_{25}+5\times 10+\underbrace{(0+2+4+6+8)}_{20}+\cdots+5\times 90+\underbrace{(0+2+4+6+8)}_{20}+100=\\
=&5\times 25+5\times 20+5\times(10+20+\cdots+90)+100=\\
=&125+100+5\times 450+100=\\
=&2575
\end{aligned}$$

Portanto, a soma de todos os números das casas pintadas de azul na minha rua é igual a 2575.

Resolução 2:

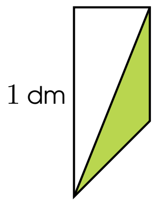
Para somar todos os números que aparecem em quadrículas azuis, observamos que a soma de cada número com o seu simétrico, relativamente ao centro do tabuleiro, é sempre igual a 99:

$$\begin{array}{cc}
1+98=99 & \vdots \\
3+96=99 & 45+54=99 \\
5+94=99 & 47+52=99 \\
\vdots & 49+50=99
\end{array}$$

Em todo o tabuleiro, há 50 quadrículas azuis que formam 25 somas, todas iguais a 99. Assim, a soma de todos os números que aparecem em quadrículas azuis é igual a $25 \times 99 = 2475$.

Portanto, a soma de todos os números das casas pintadas de azul na minha rua é igual a $2475 + 100 = 2575$.

2. Como o desenho é simétrico em relação à diagonal, basta considerarmos a figura seguinte.

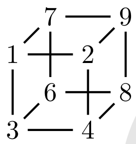


Para que a figura pintada tenha um terço da área total, tem que ter metade da área branca.

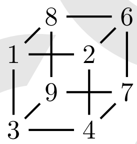
Como a área pintada e a área branca são dois triângulos com a mesma altura, então a base correspondente do triângulo pintado tem que ter metade do comprimento da base correspondente do triângulo branco.

Como a base do triângulo pintado é o lado do quadrado recortado e a base do triângulo branco mede 1 dm, então o lado do quadrado recortado mede metade de 1 dm, ou seja, 5 cm.

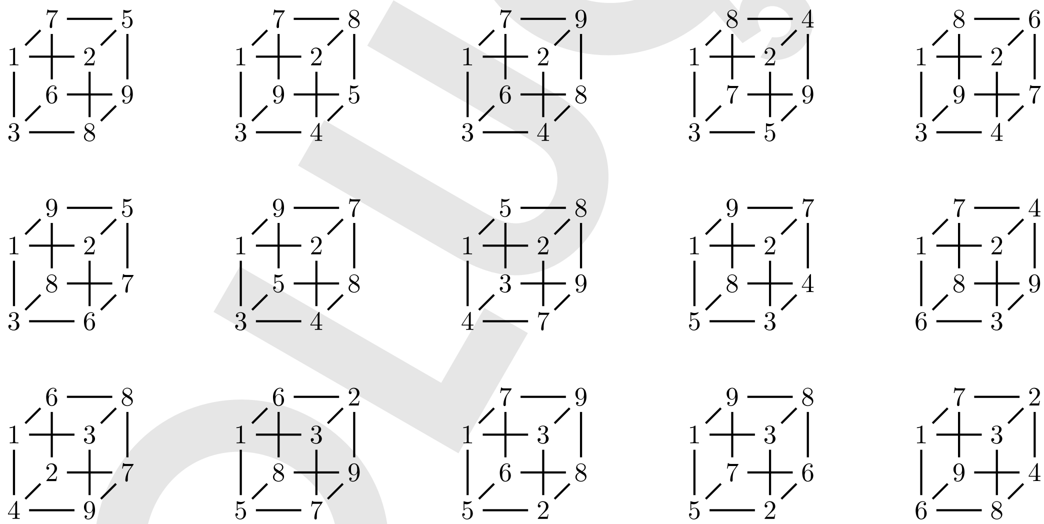
3. Uma estratégia para encontrar uma numeração dos vértices do cubo é colocar os números de 1 a 4 numa face, para obter as somas menores, e colocar os números 6 a 9 na face oposta, para obter as somas maiores.



ou



No entanto, há mais soluções para o problema. Em seguida, apresenta-se a lista completa de soluções (ignorando rotações e simetrias):



4. Seja a um número natural menor do que 1000. Se $a+b=1000$, então $b=1000-a$.

Se a é par, então b também é par, logo a e b não são primos entre si.

Do mesmo modo, se a é múltiplo de 5, então b também é múltiplo de 5, logo a e b não são primos entre si.

Suponhamos agora que a não é par, nem múltiplo de 5 e seja d um divisor de a e de b. Então d é um divisor de $1000 = 2^3 \times 5^3$, logo $d=1$. Portanto a e b são primos entre si.

Logo, o número de pares (a, b) de números naturais primos entre si tais que $a+b=1000$ é o número de naturais a entre 1 e 999 tais que a não é par nem múltiplo de 5. Entre 1 e 999 há 499 números pares. Dos 500 números ímpares restantes, um quinto é múltiplo de 5, logo, o número de pares (a, b) de números naturais primos entre si tais que $a+b=1000$ é $999-(499+100)=400$.