XXIX OPM - 2ª Eliminatória - 19.01.2011 - Categoria A - 8º/9º

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. A ovelha come o dobro do que come a cabra, e a vaca come o quádruplo do que come a cabra. Logo, a cabra, a ovelha e a vaca juntas comem $1+2+4=7$ vezes o que come a cabra. Assim, o Senhor Pereira pode alimentar, com a ração que comprou, os seus três animais durante um sétimo de 12 semanas, ou seja, durante 12 dias.

2. Os triângulos $[AYD]$ e $[ZYC]$ são congruentes porque têm lados paralelos e $\overline{YZ}=\overline{AZ}-\overline{AY}=6-3=3=\overline{AY}$. Consequentemente, $\overline{ZC}=\overline{AD}=\overline{CB}$, ou seja, $\overline{ZB}=2\,\overline{AD}$. Como os triângulos $[AXD]$ e $[ZXB]$ têm lados paralelos, então são semelhantes. Logo
$$\frac{\overline{XZ}}{\overline{AX}}=\frac{\overline{ZB}}{\overline{AD}}=2.$$
Por fim, observe-se que $\overline{AZ}=\overline{AX}+\overline{XZ}=\overline{AX}+2\,\overline{AX}=3\,\overline{AX}$. Como $\overline{AZ}=6$, conclui-se que $\overline{AX}=2$.

3. Sejam N e $N+1$ os dois menores números certeiros consecutivos. As somas dos algarismos de N e de $N+1$ são múltiplos de 5, logo a diferença entre estas somas é também um múltiplo de 5.

   Se o algarismo das unidades de N não fosse 9, então esta diferença seria -1, que não é múltiplo de 5. Logo, N termina em 9.

   Se o algarismo das dezenas de N não fosse 9, então esta diferença seria 8, que não é múltiplo de 5. Logo, N termina em 99.

   Se o algarismo das centenas de N não fosse 9, então esta diferença seria 17, que não é múltiplo de 5. Logo, N termina em 999.

   Se o algarismo dos milhares de N não fosse 9, então esta diferença seria 26, que não é múltiplo de 5. Logo, N termina em 9999.

   Se o algarismo das dezenas de milhar de N não for 9, então esta diferença é 35, que é um múltiplo de 5. O menor número certeiro da forma $A9999$ é 49999, portanto $N=49999$ e $N+1=50000$.

4. Sejam a, b, c, d, e, f e g os números a descobrir na tabela:

3	4	a
b	c	d
e	f	g

   Considerando a primeira linha e a terceira coluna, observa-se que $3\times 4\times a=d\times g\times a$, ou seja, $d\times g=12$. Como os números da tabela são distintos, então $\{d,g\}=\{1,12\}$ ou $\{d,g\}=\{2,6\}$.

   Por outro lado, também se tem que $3\times c\times g=4\times c\times f$, ou seja, $3\times g=4\times f$. Logo, g é múltiplo de 4, ou seja, $g=12$. Portanto $d=1$ e $f=9$.

   Considerando agora a segunda coluna e a segunda linha, tem-se $4\times c\times 9=b\times c\times 1$, ou seja, $b=36$.

   Como $a\times c\times e=3\times c\times 12$, então $a\times e=36$. Por outro lado, $a\times 1\times 12=e\times 9\times 12$, ou seja, $a=9\times e$. Destas duas relações conclui-se que $a=18$ e $e=2$.

   Por fim, a igualdade entre o produto dos números da primeira e da segunda linhas, permite concluir que $c=6$. Portanto, a tabela pedida é

3	4	18
36	6	1
2	9	12